

## 考虑尺度效应的微平板声振耦合特性研究

任树伟, 辛锋先 and 卢天健

Citation: [中国科学: 技术科学](#) **44**, 201 (2014 ); doi: 10.1360/092013-859

View online: <http://engine.scichina.com/doi/10.1360/092013-859>

View Table of Contents: <http://engine.scichina.com/publisher/scp/journal/SST/44/2>

Published by the [《中国科学》杂志社](#)

---

### Articles you may be interested in

[气动热-气动弹性双向耦合的高超声速曲面壁板颤振分析方法](#)

中国科学: 技术科学 **42**, 369 (2012);

[微/纳尺度高功率电子器件产热与传热特性](#)

科学通报 **57**, 3195 (2012);

[微纳机械谐振器能量耗散机理研究进展](#)

科学通报 , ;

[旋转内接微梁的动力学建模及稳定性分析](#)

中国科学: 物理学 力学 天文学 **42**, 956 (2012);

[高超声速湍流边界层中由高温引起的变比热效应及其计算](#)

中国科学: 物理学 力学 天文学 **40**, 1431 (2010);

---

# 考虑尺度效应的微平板声振耦合特性研究

任树伟, 辛锋先\*, 卢天健

西安交通大学航天航空学院, 机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049

\* E-mail: fengxian.xin@gmail.com

收稿日期: 2013-07-31; 接受日期: 2013-09-05

国家重点基础研究计划(“973”计划)(批准号: 2011CB610300)、国家自然科学基金(批准号: 11102148, 11072188 和 11021202)和中央高校基本科研专项基金(批准号: xjj2011005)资助项目

**摘要** 长宽厚均处于微米级的微平板结构广泛存在于微机电系统(MEMS)中, 开展其声振耦合特性研究对于 MEMS 在声激励下的稳定性研究以及微型声传感器的性能研究具有重要意义. 针对声压激励下的四边简支微平板结构, 基于 Cosserat 理论与 Hamilton 变分原理建立了考虑尺度效应的结构声振耦合理论模型, 并结合流固耦合条件求解了声振耦合系统控制方程. 基于理论模型开展数值计算, 系统研究了尺度效应对微平板结构声振耦合性能的影响, 具体讨论了不同尺度效应下板厚度、板长宽等关键系统参数对微平板声振耦合特性的影响, 为 MEMS 中微平板结构的工程优化设计提供了理论参考.

**关键词**  
尺度效应  
声振耦合  
Cosserat 理论  
Hamilton 变分原理  
本征长度

建立于材料连续性及均匀性假设之上的经典声振耦合理论忽略了材料内部微结构对材料声振耦合特性的影响. 但是, 在微尺度下, 材料内部微结构(如多晶材料的晶粒/晶界)的非均匀性将显著影响材料的静/动态力学性能, 使其表现出明显的尺寸效应, 这一点已被不少微观实验<sup>[1,2]</sup>所证实. 长宽厚均处于微米级的微平板结构广泛存在于微机电系统(MEMS)<sup>[3-5]</sup>中, 而 MEMS 中噪声源<sup>[6]</sup>是普遍存在的, 声学激励会引起微平板的振动, 进而引发微平板与周围流体的耦合行为, 因而系统开展微平板声振耦合特性研究并明确材料尺度效应对微平板结构声振耦合性能的影响, 无论是对于 MEMS 在声激励下的稳定性研究还是对于微型声传感器<sup>[7]</sup>的性能研究都具有重要意义.

针对微尺度下材料和结构的静力学和动力学特性, 不少学者采用 Cosserat 理论<sup>[8,9]</sup>开展了研究. 该理

论认为应变能密度不仅依赖于应变而且依赖于旋转梯度张量, 进而通过旋转梯度张量将本征长度参数引入到本构方程中, 故可刻画尺度效应对不同材料和结构力学性能的影响. 康新和席占稳<sup>[10]</sup>应用 Hamilton 变分原理建立了微梁无阻尼自由振动的微分方程, 研究了微梁振动特性的尺度效应, 发现当微梁的厚度与材料的本征长度接近时, 其固有频率将显著增加. 章定国等人<sup>[11]</sup>进一步研究了更为复杂的微梁刚柔耦合动力学分析, 考虑了大位移运动和尺度效应, 运用 Laplace 方程建立了更为精确的一次近似耦合模型. 针对任意形状各向同性 Kirchhoff 微平板的力学特性, Tsias<sup>[12]</sup>建立了含尺度效应的理论模型, 并分析了该模型与传统连续理论模型之间的区别, 但该模型仅限于静力学范畴. 王晓明等人<sup>[13]</sup>研究了尺度效应对四边简支微平板自由振动的影响, 分析了不同尺寸下微平板的固有频率随本征长度变

**引用格式:** 任树伟, 辛锋先, 卢天健. 考虑尺度效应的微平板声振耦合特性研究. 中国科学: 技术科学, 2014, 44: 201-208  
Ren S W, Xin F X, Lu T J, et al. Vibroacoustic characteristics of micro-plates considering scale effect (in Chinese). Sci Sin Tech, 2014, 44: 201-208, doi: 10.1360/092013-859

化的规律, 但未考虑其他类型的边界条件及不同板形状情况下尺度效应的作用. Jomehzadeh 等人<sup>[14]</sup>研究了微方板和微圆板在多种边界条件下的自由振动特性及其对尺度效应的依赖, 相关理论模型更具有-般性和普遍性, 为研究具有复杂形状和复杂边界条件的微平板的动力学特性提供了新的方法. Mohd-Yasin 等人<sup>[6]</sup>将以往的关于 MEMS 中噪声现象的研究进行了系统的总结, 包括噪声的分类、产生机理以及影响等.

综上所述, 国内外学者已经在不同层面开展了尺度效应对微结构静力学和动力学特性影响的研究, 但尚无针对微平板声振耦合行为中尺度效应的研究. 本文基于 Cosserat 理论, 考虑材料内部微结构的尺度效应, 应用 Hamilton 变分原理建立了微平板结构的声振耦合理论模型; 将声压以简支模态级数的形式引入振动控制方程, 结合流固耦合条件求解了考虑材料尺度效应的声振耦合控制方程, 系统研究了材料尺度效应对微平板结构声振耦合性能的影响, 具体分析讨论了不同板厚及长宽比下微平板的材料本征长度对其声振耦合特性的影响. 本文结果为 MEMS 中微平板结构的精确设计提供了必要的理论参考.

### 1 理论模型

考虑如图 1 所示四边简支微平板结构的声振耦合特性. 对具有微米尺度的 Kirchhoff 板而言, 经典弹性理论不再适用. 与经典弹性理论不同, Cosserat 理论<sup>[13]</sup>不再把材料视为理想的连续、均匀的变形体, 单元体的选取不再是任意小的微元体, 而是考虑材料内部微结构的影响: 即单元体具有一定的尺度, 且假设每个材料粒子有 3 个位移自由度  $u_i$  ( $i=1,2,3$ )和

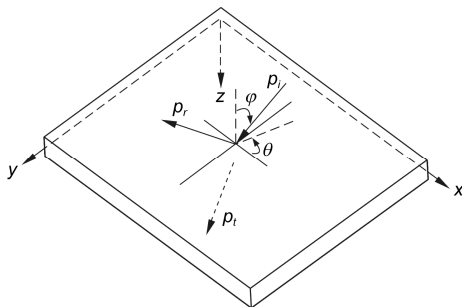


图 1 四边简支微平板结构传声示意图

3 个旋转自由度  $\omega_i$  ( $i=1,2,3$ ).

对 Cosserat 理论进行线性化处理可得约束转动 Cosserat 理论<sup>[13]</sup>, 该理论假定粒子的转动等同于物质转动, 即  $\omega_i = e_{ijk} u_{k,j} / 2$  (其中  $e_{ijk}$  为置换张量), 且相对应的应变张量为零. 结合经典弹性理论, 在入射声压  $p_i$  作用下, 图 1 所示微平板的位移张量可表示为

$$\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \omega_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1)$$

其中  $w$  为微平板在  $z$  方向上的挠度, 曲率张量为  $\chi_{ij} = \omega_{i,j}$ .

采用约束转动 Cosserat 理论, 应变能密度仅为应变和曲率的函数<sup>[15]</sup>, 故可将应变能表示为

$$U = \int \left[ \mu (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + l^2 \chi_{ij} \chi_{ij}) + \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} \right] dV, \quad (2)$$

其中  $\varepsilon_{ij}$  为应变张量,  $\mu$  和  $\lambda$  为拉梅系数. 考虑微平板构成材料的阻尼  $\eta$  并引入复数形式的弹性模量  $E(1+j\eta)$ , 则有

$$\mu = \frac{E(1+j\eta)}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E(1+j\eta)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

其中  $j = \sqrt{-1}$  为虚数单位,  $\nu$  为材料的泊松比,  $l$  为材料的本征长度, 与材料的微结构尺度相关.

由于微平板在  $x, y$  方向的振动动能远小于其在  $z$  方向的振动动能, 故仅考虑后者, 同时忽略具有相同  $(x, y)$  坐标的材料粒子在  $z$  方向振动速度的差别. 则微平板振动的动能可表示为

$$T = \frac{1}{2} \int_A \rho h \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dA, \quad (3)$$

其中  $\rho$  为微平板的材料密度,  $h$  为微平板的厚度,  $A$  为微平板的面积.

如图 1 所示, 声压  $p_i$  入射到微平板时, 在其入射侧产生反射声压  $p_r$ , 同时在透射侧产生透射声压  $p_t$ , 3 个声压同时对微平板做功, 使其产生振动. 故声压做功可表示为

$$W = \int_A (p_i + p_r - p_t) w dA. \quad (4)$$

Hamilton 变分原理要求:

$$\delta S = 0, \quad (5)$$

其中的 Hamilton 作用量  $S$  为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (U - T - W) dt. \quad (6)$$

将(2)~(4)式代入(5)式可得

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T - \delta W) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_A \left\{ \left[ \frac{E(1+j\eta)h^3(1-\nu)}{12(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E(1+j\eta)l^2h}{2(1+\nu)} \right] \nabla^4 w \right. \\ &\quad \left. + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (p_i + p_r - p_t) \right\} \delta w dA dt = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

由此可得振动控制方程:

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{E(1+j\eta)h^3(1-\nu)}{12(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E(1+j\eta)l^2h}{2(1+\nu)} \right] \nabla^2 \nabla^2 w \\ &+ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_i + p_r - p_t. \end{aligned} \quad (8)$$

考虑材料微结构尺度效应的影响, 定义微平板的等效弯曲刚度为

$$\bar{D} = \frac{E(1+j\eta)h^3(1-\nu)}{12(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E(1+j\eta)l^2h}{2(1+\nu)}, \quad (9)$$

则可将声波激励下微平板的振动控制方程表示为

$$\bar{D} \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_i + p_r - p_t. \quad (10)$$

简支边界条件下(图 1), 微平板的振动挠度可表示为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \varphi_{mn} e^{j\omega t}, \quad (11)$$

其中  $\varphi_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$  为简支模态函数,  $A_{mn}$  为简支模态系数.

入射的平面简谐激励声压可表示为

$$p_i(x, y, t) = p_0 e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}, \quad (12)$$

其中  $p_0$  为入射声压幅值,  $\omega$  为声波的圆频率,  $k_x, k_y, k_z$  是波数在  $x, y, z$  上的分量, 分别为

$$\begin{aligned} k_x &= k_0 \sin \varphi \cos \theta, \\ k_y &= k_0 \sin \varphi \sin \theta, \\ k_z &= k_0 \cos \varphi, \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $k_0 = \omega/c$  为空气中声波的波数,  $c$  为声波在空气中的传播速度,  $\varphi$  为入射俯仰角,  $\theta$  为入射方向角(如图 1 所示).

考虑简支边界条件对结构振动的影响, 将反射声压表示为简支模态级数的形式:

$$p_r(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{mn} \varphi_{mn} e^{j(\omega t + k_z z)}, \quad (14)$$

其中  $\beta_{mn}$  为第  $mn$  阶反射声压的幅值.

同理, 透射声压也可表示为简支模态级数的形式

$$p_t(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{mn} \varphi_{mn} e^{j(\omega t - k_z z)}, \quad (15)$$

其中  $\varepsilon_{mn}$  为第  $mn$  阶透射声压的幅值.

为了声压表示形式的一致性和方程求解的方便性, 将入射声压也表示为简支模态级数形式:

$$p_i(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \varphi_{mn} e^{j(\omega t - k_z z)}, \quad (16)$$

其中

$$I_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p_0 e^{j(-k_x x - k_y y)} \varphi_{mn} dx dy, \quad (17)$$

积分得

$$I_{mn} = \frac{4mn\pi^2 (e^{-jk_x a} \cos m\pi - 1)(e^{-jk_y b} \cos n\pi - 1)}{[(k_x a)^2 - (m\pi)^2][(k_y b)^2 - (n\pi)^2]}. \quad (18)$$

在流体介质与微平板上下表面相邻的交界面上, 流体质点与紧邻的固体质点在垂直于交界面的速度分量应该相等, 即满足流固耦合条件:

$$\begin{aligned} z = -h/2: \quad &\frac{\partial(p_i + p_r)}{\partial z} = \rho_0 \omega^2 w, \\ z = h/2: \quad &\frac{\partial p_t}{\partial z} = \rho_0 \omega^2 w, \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $\rho_0$  为空气的密度.

将(11), (12), (14)和(15)式代入(19)式, 可得  $\beta_{mn}, \varepsilon_{mn}$  与  $A_{mn}$  的关系式:

$$\beta_{mn} = \frac{-j\rho_0 \omega^2 A_{mn} e^{jk_z h/2} + I_{mn} k_z e^{jk_z h}}{k_z}, \quad (20)$$

$$\varepsilon_{mn} = \frac{j\rho_0 \omega^2 A_{mn} e^{jk_z h/2}}{k_z}. \quad (21)$$

考虑到(20)和(21)式, 将(12), (14)和(15)式代入(10)式, 可得

$$A_{mn} = \frac{2e^{jk_z h/2} I_{mn}}{\bar{D} B_{mn}^2 - (\rho h - 2j\rho_0/k_z) \omega^2}, \quad (22)$$

其中  $B_{mn} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ .

将(22)式代入(20)及(21)式中, 得

$$\beta_{mn} = \left\{ \frac{2j\rho_0\omega^2 e^{jk_z h}}{k_z [(\rho h - 2j\rho_0/k_z)\omega^2 - \bar{D}B_{mn}^2]} + e^{jk_z h} \right\} I_{mn}, \quad (23)$$

$$\varepsilon_{mn} = \frac{2j\rho_0\omega^2 e^{jk_z h}}{k_z [\bar{D}B_{mn}^2 - (\rho h - 2j\rho_0/k_z)\omega^2]} I_{mn}. \quad (24)$$

传声损失(Sound Transmission Loss)定义为

$$STL = 10 \log_{10} \left( \frac{W_t}{W_i} \right), \quad (25)$$

其中  $W_i$  和  $W_t$  分别为入射声压和透射声压的声功率.

入射声功率定义为

$$W_i = \frac{1}{2} Re \iint_A p_i \cdot v_i^* dA, \quad (26)$$

其中 \* 是复数共轭标志,  $v_i = p_i / (\rho_0 c)$  是当地流体质点速度. 透射声功率定义为

$$W_t = \frac{1}{2} Re \iint_A p_t \cdot v_t^* dA, \quad (27)$$

其中  $v_t = p_t / (\rho_0 c)$  是当地流体质点速度.

将(16)式代入(26)式中, 得

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{1}{2\rho_0 c} \times \iint_A \left| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{jk_z h/2} \right|^2 dA \\ &= \frac{1}{2\rho_0 c} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} I_{mn} I_{kl} \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^b \int_0^a \left( \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right) dx dy \right|. \end{aligned} \quad (28)$$

根据三角函数的正交性可得

$$\begin{aligned} &\int_0^b \int_0^a \left( \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right) dx dy \\ &= \begin{cases} 0, & m \neq k \parallel n \neq l, \\ \frac{ab}{4}, & m = k \ \& \ n = l, \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

则

$$W_i = \frac{ab}{8\rho_0 c} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn}^2 \right|. \quad (30)$$

同理:

$$W_t = \frac{ab}{8\rho_0 c} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{mn}^2 \right|. \quad (31)$$

## 2 参数分析

### 2.1 收敛性分析

由于理论解是以双级数的形式给出, 数值计算时需要选取足够的求和级数项以保证结果的收敛性. 一般而言, 若一定项数的级数求和结果在给定的频率处收敛, 则该项数的级数求和结果在低于此给定频率的任意频率处都能收敛<sup>[16]</sup>. 由于本文计算的最高频率是  $10^8$  Hz, 故选择  $10^8$  Hz 用于检验 STL 的收敛性. 由图 2 结果可见, 当级数求和指标  $m$  和  $n$  取值 70 或更大数值时, STL 是收敛的. 因此, 后续基于理论模型的数值计算统一选取  $m=n=70$  进行, 足以保证所有计算结果的收敛性和准确性.

### 2.2 尺度效应(本征长度)的影响

以下的数值计算选取微平板的长度  $a=80 \mu\text{m}$ , 宽度  $b=50 \mu\text{m}$ , 厚度  $h=5 \mu\text{m}$ , 杨氏模量  $E=50 \text{ GPa}$ , 泊松比  $\nu=0.33$ , 密度  $\rho=2700 \text{ kg/m}^3$ , 空气的密度  $\rho_0=1.293 \text{ kg/m}^3$ , 声速  $c=340 \text{ m/s}$ .

本征长度  $l$  是 Cosserat 理论中最重要的参数, 与材料内部微结构的尺度相关. 在声压垂直入射的情况下, 取上述规定的参数不变, 并分别取本征长度  $l$  为 0, 0.5, 5.0, 7.5  $\mu\text{m}$ , 得到了不同本征长度下的结构传声损失 STL 随入射声压(垂直入射和斜入射)频率的变化规律, 如图 3 和 4 所示.

微平板在斜入射声波的激励下发生包含各阶固有振动模态的弯曲波, 这些弯曲波在两对边筒支边界之间来回反射, 斜入射的声波与这些来回反射的

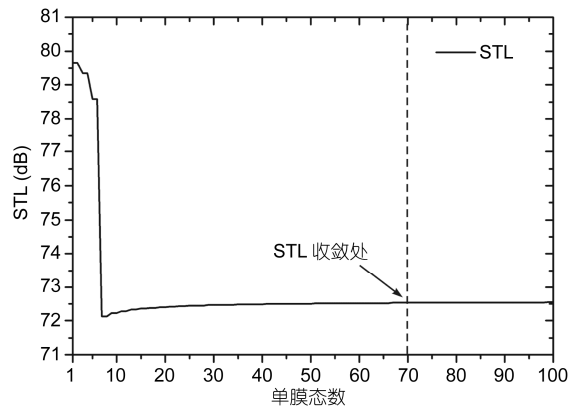


图 2 传声损失 STL 的收敛性(声波垂直入射)

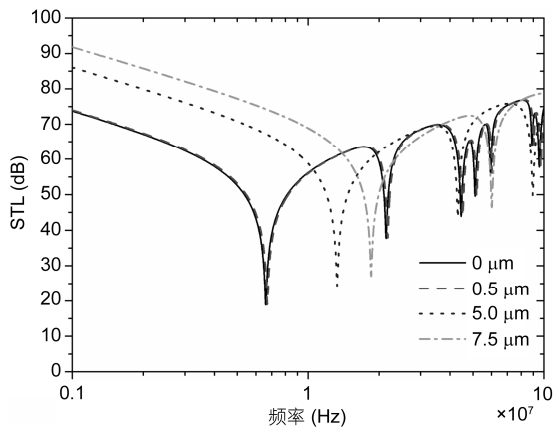


图3 本征长度对微平板传声损失的影响(声波垂直入射)

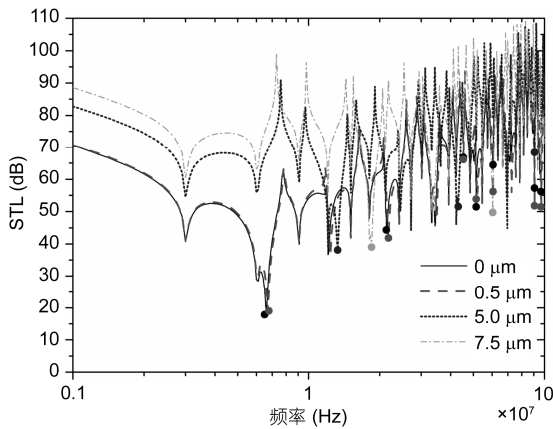


图4 本征长度对微平板传声损失的影响  
声波斜入射  $\varphi=45^\circ, \theta=0^\circ$

各阶固有弯曲波发生周期性吻合共振, 导致图4中4种不同本征长度对应的传声损失曲线同时出现密集的周期性波谷。

由(18)式可知, 存在周期性频率  $f_m, f_n$  使其分母趋近于0, 导致  $I_{mm}$  取极限值, 这即是图4中出现周期性波谷的理论机理。令(18)式分母为0, 即可得周期性波谷频率的表达式, 如(32)式所示。

$$f_m = \frac{mc}{2a \sin \varphi \cos \theta}, \quad (32)$$

$$f_n = \frac{nc}{2b \sin \varphi \sin \theta}.$$

由(32)式可知, 当声波垂直入射( $\varphi=0^\circ, \theta=0^\circ$ )时, 周期性频率  $f_m, f_n$  趋近于无穷大, 因此图3中传声损失曲线不存在周期性波谷。

当激励声波的频率达到微平板的固有频率时, 由于两者的频率相同, 微平板会产生共振, 板的剧烈振动引起微平板下侧临近的空气质点剧烈振动, 进而导致透射声波的显著增强, 这就是图3和4传声损失曲线隔声波谷(图4中由圆点标出)形成的力学机理。值得注意的是, 垂直入射的声波载荷激励虽然未能激发出微平板所有的固有模态, 却总能激发出微平板的基频模态。

四边简支微平板自由振动固有频率为

$$f_{m,n} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{\bar{D}}{\rho h}}, \quad (m, n=1,2,3\cdots). \quad (33)$$

(33)式适用于具有不同材料本征长度的微平板。以  $l=0.5 \mu\text{m}$ 、声波垂直入射的 STL 曲线为例, 其在所研究的频率范围内( $10^6 \sim 10^8 \text{ Hz}$ )有7个明显的波谷(图3), 进一步分析发现这些波谷对应的频率与(33)式计算得到的微平板的固有频率有很好的吻合度, 两者对比情况见表1。

本征长度为  $0 \mu\text{m}$  时, 等效的弯曲刚度  $\bar{D}$  退化为经典弹性理论中的弯曲刚度  $D$ 。也就是说, 此时微平板材料均匀(无内部微结构), 其动力学性能不存在尺度效应。由图3和4可见, 相对于未考虑材料尺度效应( $l=0 \mu\text{m}$ )的传声损失曲线, 考虑材料尺度效应后(即本征长度  $l$  不为0), 微平板的传声损失特性发生了明显变化。

当本征长度( $l=0.5 \mu\text{m}$ )远小于微平板厚度时, 尺度效应很弱, STL 曲线相较于经典弹性理论得到的

表1 STL 曲线波谷频率与微平板固有频率对比( $l=0.5 \mu\text{m}$ , 声波垂直入射)

STL 曲线波谷	波谷对应频率 ( $10^7 \text{ Hz}$ )	固有频率 ( $10^7 \text{ Hz}$ )	固有模态 ( $m, n$ )
1	0.671	0.67060	(1, 1)
2	2.178	2.17756	(3, 1)
3	4.528	4.52843	(1, 3)
4	5.192	5.19149	(5, 1)
5	6.035	6.03539	(3, 3)
6	9.049	9.04932	(5, 3)
7	9.713	9.71238	(7, 1)

STL 曲线变化很小: 两条曲线整体走势一致, 在小于  $3.5 \times 10^7$  Hz 的频段内, 两者基本上是重合的; 随着频率的增加, 两者的差异略有增大,  $l=0.5 \mu\text{m}$  的 STL 曲线上隔声低谷向右移动的趋势越来越明显。

当本征长度与微平板的厚度相近时 ( $l=5 \mu\text{m}$ ), 尺度效应明显增强, 隔声波谷的数量和分布均发生显著变化. 随着本征长度的进一步增加 ( $l=7.5 \mu\text{m}$ ), 隔声波谷在所研究频段内的数量进一步减少. 由(9)和(33)式可知, 对于相同的微平板, 相同振动模式对应的固有频率随着本征长度的增加而升高, 因此在相同的频率范围内(如  $10^6 \sim 10^8$  Hz), 微平板振动模态的数量随着本征长度的增加而减少, 垂直声压能够激发的微平板固有模态的数量也同时减少. 此外, 在低频段内 ( $10^6 \sim 0.6 \times 10^7$  Hz), 传声损失随着本征长度的增加有所提高; 在高频段内 ( $8 \times 10^7 \sim 10 \times 10^7$  Hz), 随着本征长度的增加, 隔声波谷减少, 但 STL 值无明显变化。

从分析微平板尺度效应下声振耦合特性的角度, 由图 4 可以得出与图 3 一致的结论. 由于周期性波谷对参数分析有一定的干扰, 下文将只考察声波垂直入射的情形。

### 2.3 不同尺度效应下微平板厚度对传声损失的影响

固定微平板的长度和宽度不变, 分别取本征长度  $l$  为 2.5, 5.0, 7.5  $\mu\text{m}$ , 研究厚度分别为 2.5, 5.0, 7.5  $\mu\text{m}$  的微平板的声振耦合特性. 结构传声损失 STL 随入射声压频率变化的曲线如图 5 所示。

从图 5 可见, 随着板厚的增加, 不同本征长度所对应的传声损失 STL 曲线上的隔声波谷都向高频移动. 在整个研究频段内, 隔声波谷的数量不仅随着本征长度的增加而减少, 而且也随着板厚的增加而减少. 由(9)和(33)式可知, 对具有相同本征长度的微平板而言, 相同振动模式对应的固有频率随着板厚的增加而升高(对应传声损失 STL 曲线上的隔声波谷向高频移动). 因此在相同的频率范围内(如  $10^6 \sim 10^8$  Hz), 微平板振动模态的数量随板厚的增加而减少, 垂直声压能够激发的微平板固有模态的数量也相应减少。

由图 5 还可发现, 无论本征长度的大小如何, 在整个研究频段内 STL 值均随板厚的增加而升高, 这说明在微尺度条件下厚板的隔声能力优于薄板, 这符合常规尺度条件下的质量定律. 但是, 通过比较图 5 中的(a)~(c)三图发现: 随着材料本征长度的增加, 微平板的厚度对传声损失曲线整体趋势的影响越来越

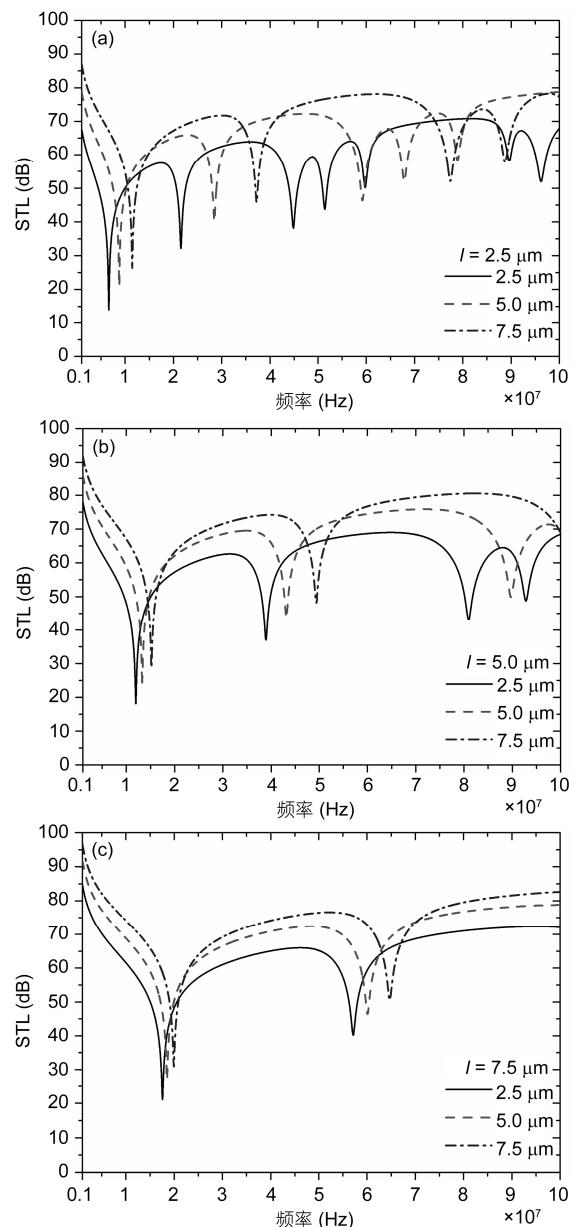


图 5 不同尺度效应下微平板厚度对其结构传声损失的影响  
声波垂直入射, (a)~(c)中的材料本征长度  $l$  分别为 2.5, 5.0, 7.5  $\mu\text{m}$

越弱; 当本征长度等于或大于微平板的厚度时(如图 5(c)), 传声损失曲线的整体趋势趋于一致。

### 2.4 不同尺度效应下微平板的长度和宽度对传声损失的影响

固定微平板的厚度, 分别取材料本征长度  $l$  为 2.5, 5.0, 7.5  $\mu\text{m}$ , 研究长度和宽度分别为  $80 \mu\text{m} \times 50 \mu\text{m}$ ,  $120 \mu\text{m} \times 75 \mu\text{m}$ ,  $160 \mu\text{m} \times 100 \mu\text{m}$  的微平板的声振耦合特性。

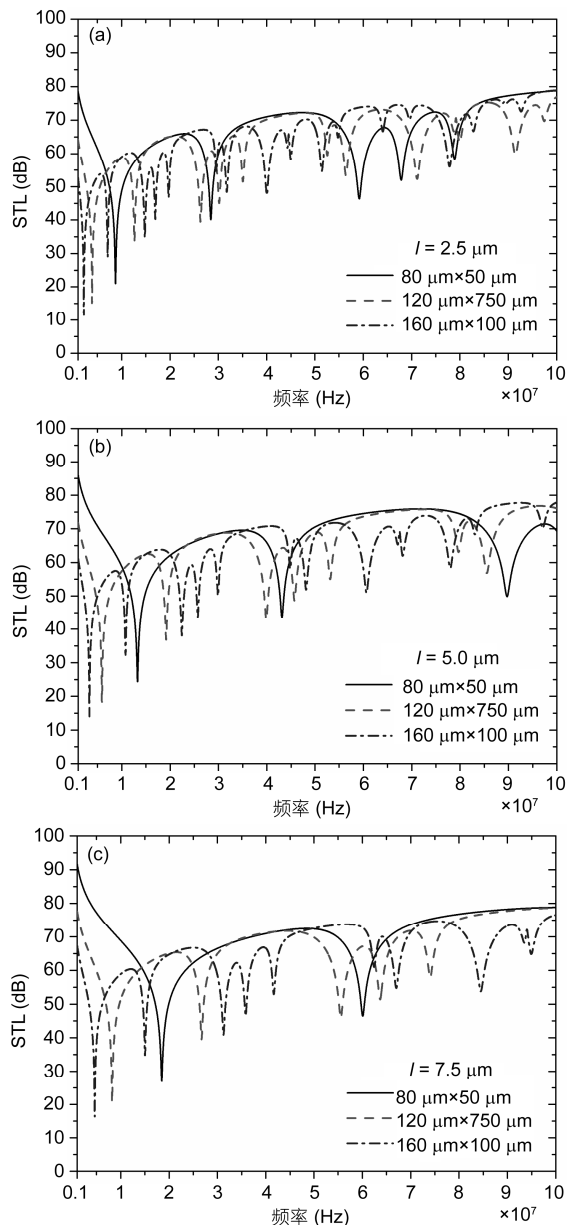


图6 不同尺度效应下微平板长宽尺寸对其结构传声损失的影响

声波垂直入射, (a)~(c)中的材料本征长度  $l$  分别为 2.5, 5.0, 7.5  $\mu\text{m}$

与此相对应的结构传声损失曲线如图 6(a)~(c)所示。从图 6 可见, 随着板长宽尺寸的增加, 不同材料本征长度所对应的传声损失曲线上的隔声波谷均向低频移动。由(33)式可知, 微平板的固有频率随板长宽尺寸的增加而降低, 故 STL 曲线上相对应的隔声波谷向低频移动, 同时导致相同频率范围内, 微平板振动模态密度的增大, 对应于传声损失曲线上隔声低谷的增加。在低频段内( $10^6$ ~ $10^7$  Hz), 随着板长宽尺寸的减小, 传声损失有所提高; 在中高频段内, 随着长宽尺寸的增加, 传声损失无明显变化。

### 3 结论

基于 Cosserat 理论和 Hamilton 变分原理, 本文建立了考虑尺度效应(材料本征长度)的微平板声振耦合理论模型, 并利用该模型系统考察了尺度效应及不同尺度效应下板厚度、板长宽等关键系统参数对微平板声振耦合特性的影响。

微平板的 3 个主要参数(本征长度、板厚度、板长宽)对其声振耦合行为有着非常显著的影响。当本征长度接近或大于板厚度时, 微平板声振耦合行为的尺度效应明显增强。随着尺度效应的增大, 由于结构等效弯曲刚度的增加导致微平板固有频率增大, 传声损失曲线上的隔声波谷明显向高频移动。

在不同尺度效应作用下, 板厚的增加可提高微平板在整个频段内的隔声性能, 但随着材料本征长度的增加, 板厚对传声损失曲线整体趋势的影响越来越弱, 且当本征长度等于或大于板厚时, 传声损失曲线的整体趋势趋于一致。

微平板长宽尺寸的减小可提高其固有频率, 从而提高微平板在低频段内的隔声性能, 并降低微平板的模态密度。总体而言, 在低频段, 传声损失随着尺度效应(本征长度)的增加而增大; 在中高频段, 随着尺度效应(本征长度)的增加, 传声损失无明显提高, 隔声波谷却急剧减少。

### 参考文献

- 1 Fleck N A, Muller G M, Ashby M F, et al. Strain gradient plasticity: Theory and experiment. *Acta Metallurgica et Materialia*, 1994, 42: 475-487
- 2 Lam D C C, Yang F, Chong A C M, et al. Experiments and theory in strain elasticity. *J Mech Phys Solids*, 2003, 51: 1447-1058
- 3 孙丽波. 微板多物理场耦合非线性动力学分析. 博士学位论文. 秦皇岛: 燕山大学, 2011
- 4 吴振彤. 微板机电耦合动力学研究. 硕士学位论文. 秦皇岛: 燕山大学, 2008



- 5 尹莉. 微尺度下结构的静动力学行为研究. 博士学位论文. 武汉: 华中科技大学, 2010
- 6 Mohd-Yasin F, Nagel D J, Korman C E. Noise in MEMS. *Meas Sci Technol*, 2010, 21: 1–22
- 7 夏钟福, 邱勋林, 朱伽倩, 等. 硅基驻极体微型声-电传感器的研究现状. *电声技术*, 2001, 193: 18–21
- 8 Yang F, Chong A C M, Lam D C C, et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *Int J Solids Struct*, 2002, 39: 2731–2743
- 9 Zhang X, Sharma P. Inclusions and inhomogeneities in strain gradient elasticity with couple stresses and related problems. *Int J Solids Struct*, 2005, 42: 3833–3851
- 10 康新, 席占稳. 基于 Cosserat 理论的微梁振动特性的尺度效应. *机械强度*, 2007, 29: 001–004
- 11 章定国, 吴胜宝, 康新. 考虑尺度效应的微梁刚柔耦合动力学分析. *固体力学学报*, 2010, 31: 32–39
- 12 Tsiatas G C. A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory. *Int J Solids Struct*, 2009, 46: 2757–2764
- 13 王晓明, 王飞, 赵学增, 等. 基于 Cosserat 理论的四边简支自由振动微平板尺度效应研究. *固体力学学报*, 2012, 33: 63–68
- 14 Jomehzadeh E, Noori H R, Saidi A R. The size-dependent vibration analysis of micro-plates based on a modified couple stress theory. *Physica E*, 2011, 43: 877–883
- 15 Chong A C M, Yang F, Lam D C C, et al. Torsion and bending of micron-scaled structures. *J Mater Res*, 2001, 16: 1052–1058
- 16 卢天健, 辛锋先. 轻质板壳结构设计的振动和声学基础. 北京: 科学出版社, 2012

## Vibroacoustic characteristics of micro-plates considering scale effect

REN ShuWei, XIN FengXian & LU TianJian

*State Key Laboratory for Mechanical Strength and Vibration, School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*

Micro-plates of micron-size length, width and thickness are widely used in micro-electro-mechanical systems (MEMS), therefore, the analysis on the vibroacoustic characteristic of micro-plates is of paramount importance to ensure the stability of MEMS under acoustic excitation and the accuracy of acoustic sensors. The vibroacoustic performance of micro-plates with simply supported boundary condition is theoretically investigated by applying Cosserat theory and Hamilton variational principle, which has taken into account the scale effect of the micro-plate. The resultant equations are solved in conjunction with fluid-structure coupling condition. The developed model is used to investigate the influences of the scale effect and several key parameters, including length, width and thickness of the micro-plates, on the vibroacoustic characteristic of micro-plates. The present model hopes to provide a theoretical reference for the engineering optimization design of micro-plates in MEMS.

**Scale effect, vibroacoustic, Cosserat theory, Hamilton variational principle, characteristic length**

doi: 10.1360/092013-859